1093. D'Amore, B. (2024). Riflessioni sugli errori degli studenti e sulle convinzioni dei docenti nel processo di insegnamento-apprendimento in Matematica. In: Asenova, M., & D'Amore, B. (Eds.) (2024). *La didattica della Matematica al servizio del Docente per un insegnamento efficace*. Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica* XXXVIII, Castel San Pietro Terme, 22-24 XI 2024. Bologna: Bonomo. Pp. 3-6.

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
NRD, Università di Bologna

Abstract. *In this text we propose an analysis of some typical student errors and offer an elementary attempt to justify them, based on certain teacher attitudes. The aim is to propose a critical reflection on the teaching-learning process*.

Il proliferare di tante e spesso diverse teorie, pur nelle similitudini non sempre evidenti (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020; Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Fúneme, Iori, & Santi, 2022) nel campo della Didattica della Matematica porta noi ricercatori talvolta a … dimenticare o a dare per scontato quel che di concreto si avverte nelle aule delle scuole di tutto il mondo, quel che costituisce la vera, reale, tangibile preoccupazione del docente professionista. Questa riflessione ci è stata proposta con gentilezza e concretezza durante un seminario a tenere il quale eravamo stati invitati; ci era stato chiesto di presentare in termini comprensibili le più recenti teorie in Didattica della Matematica.

Ora, beninteso, non rientra nelle nostre incombenze quel che a volte sembra essere atteso in corsi per docenti: "insegnare a insegnare"; nessun ricercatore serio, scienziato, può essere così ingenuo da pensare che sia questo lo scopo del proprio lavoro. [Anche se esistono da anni persone che creano e diffondono "metodi per l'insegnamento efficace e di sicuro successo", ma si stratta sempre di personaggi ben lungi da una seria ricerca scientifica (D'Amore, & Fandiño Pinilla, 2016)].

Tuttavia, la manifestazione di sconforto dei colleghi docenti di scuola non può non essere ascoltata e presa in seria considerazione. Pur restando loro i protagonisti professionali della docenza scolare, riteniamo che la nostra assidua presenza nelle aule e il nostro profondo lavoro nella ricerca possono aiutare, collaborare a capire le problematiche del sottile e complesso passaggio fra insegnamento e apprendimento, anche in modo concreto.

Alla nostra richiesta a questi docenti di spiegare bene quale fosse il problema avvertito, la risposta ci è stata proposta in molte modalità diverse, ma riteniamo si possa riassumere così, con parole prese a prestito da uno degli intervenuti: «Noi insegniamo, ce la mettiamo tutta a insegnare bene, in modo corretto ed efficace. I ragazzi sembra che abbiano capito, appreso; ma poi fanno degli errori che ti lasciano sconcertato».

Bellissima, semplice ma efficace descrizione del problema reale!

Inutile ora mettersi a disquisire sulla teoria delle situazioni (TdS) di Guy Brousseau e in particolare sul problema degli ostacoli ontogenetici, didattici ed epistemologici (D'Amore, 1999). È bene riflettere, invece, ancora una volta su che cosa siano gli errori, come si creano, come si manifestano e come si possono correggere o, meglio, se possibile prevenire.

Abbiamo potuto verificare che non tutti i ricercatori che attualmente si dedicano alla Didattica della Matematica, assorti come sono da problemi teorici relativi alle diverse e più diffuse teorie di Didattica della Matematica (TdS, semiotica duvaliana, EOS, TO, solo per citarne alcune, …) sanno che, al momento della nascita di quella che oggi chiamiamo "Didattica della Matematica", mentre si consolidava la ricerca dettata dalla teoria delle situazioni, si avviavano anche altre tipologie di ricerche che avevano alterna fortuna in diverse parti del mondo. Una di queste, preliminare a molte altre, era proprio legata allo studio concreto degli errori degli studenti, alle cause di questi errori, alle eventuali proposte didattiche del docente che potevano averli originati, ai rimendi da proporre. Molti di questi studiosi si dichiaravano avversari delle "teorie" (in primis della TdS) perché, a loro avviso,

non erano proposte "concrete" ma, appunto, solo "teoriche". [A scanso di equivoci, noi siamo convinti partitari del modo di pensare espresso dal seguente aforisma popolare: *Non c'è nulla di più concreto che una buona teoria*].
(Una bibliografia su questo tipo di studi e su questa posizione sarebbe sterminata; ci limitiamo a suggerire quella che appare in D'Amore (2022)).
Ma avvertiamo che lo studio teorico della relazione fra insegnamento del docente ed errori degli studenti fa parte ancora oggi delle ricerche, grazie ad aspetti profondi di studi relativamente recenti. Per esempio la teoria delle misconcezioni, l'analisi delle convinzioni e concezioni dei docenti, della semiotica duvaliana ecc.
Segnaliamo a mo' di esempio i risultati scientifici di due tesi dottorali di questi ultimi anni (Becerra Galindo, & Font, 2019; Becerra Galindo, 2020, 2021, 2022; Ramírez Bernal, 2013, 2017, 2020).
Segnaliamo inoltre, a mo' di esempio, un interessante e concreto lavoro sulla "semiotica dei puntini", come la chiamano gli autori (Bagni, & Negrini, 2000), relativo alle diverse interpretazioni che danno studenti e docenti dei puntini di sospensione che appaiono in Matematica in moltissime occasioni.
Per esempio, quando il docente (di qualsiasi livello scolastico) scrive alla lavagna qualcosa come N = {0, 1, 2, 3, …} o $\pi = 3{,}141592\ldots$ o $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ o $10/3 = 3{,}333\ldots$, con quei tre puntini sospensivi sta indicando situazioni assai diverse tra loro, delle quali egli è perfettamente cosciente, ma con un simbolismo identico. Nella sua convinzione culturale profonda e certo corretta, il docente sa bene come devono (dovrebbero) essere interpretati in ciascun caso quei puntini. Ma i due autori rivelarono ben altro nella loro ricerca empirica! Gli studenti erano convinti che i tre puntini rappresentassero possibili prosecuzioni di successioni numeriche con caratteristiche facilmente immaginabili; per esempio, dopo 1,4142 qualcuno sospettava dovesse apparire 43444546… e così via.
D'altro canto, chi qui scrive ama ricordare la dichiarazione di uno studente di V secondaria di II grado, M., il quale affermò con totale convinzione che, in quella rappresentazione di N, dopo il 3, i tre puntini indicano i numeri naturali: 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e basta!, mostrando di aver sempre creduto, in tutto il suo percorso scolastico di 13 anni, che i numeri naturali sono quelli che si scrivono con una sola cifra (talvolta includendo 0 e talaltra no).

A proposito di terminologia corretta, sono diffusi nel mondo della scuola termini il cui significato risulta ambiguo o scorretto, il che non giova all'apprendimento significativo e consapevole degli studenti. Ci limitiamo di seguito a un paio di esempi.

Enunciato del teorema di Pitagora.
Eccone uno tratto da un testo: «In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa (cioè: il cui lato è l'ipotenusa) è uguale alla somma dei due quadrati costruiti sui cateti».
Ma: che cosa significa che "un quadrato è *uguale alla somma* di due quadrati"? Che cosa significa qui "somma"? Se accostiamo tra loro due quadrati, non si ottiene in alcun modo un quadrato. Quel che riguarda l'aggettivo "uguale" ha a che fare con l'area non con le figure. Cioè: non si addizionano le figure (i quadrati) si addizionalo le misure delle loro aree.
Si potrebbe allora proporre, per esempio, il seguente enunciato: «In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti», o cose analoghe, in modo tale che la somma sia tra aree, cioè tra numeri, e non tra figure geometriche.

Altezza di un triangolo.
Dato un triangolo ABC, si chiama "altezza di ABC rispetto al vertice A …" (questo è il definiens); in quanto al definiendum, talvolta viene proposto, al posto dei puntini la frase: "… la retta che passa da/per A ed è perpendicolare alla retta BC"; in altre occasioni: "… la semiretta di origine A perpendicolare alla retta BC"; in altre: "… il segmento che ha come vertici A e il punto di intersezione fra la retta perpendicolare a BC che passa per A e la retta BC"; in altre: "… la distanza fra A e la retta BC"; e ci sono molte altre proposte che circolano, riscontrabili sui libri di testo.

Il docente deve scegliere personalmente che cosa vuole che sia tale oggetto matematico, scegliere la definizione che gli sembra più opportuna o corretta e proporre quella ai propri studenti, senza ambiguità.
Si noti che, in certe occasioni, tale altezza è una retta, in altre una semiretta, in altre un segmento, in altre un numero (quello che esprime la misura di un determinato segmento).
Georg Cantor forse per primo, ma tanti altri matematici moderni e contemporanei hanno riconosciuto e posto in evidenza la "libertà della Matematica": «L'essenza della Matematica risiede nella sua libertà», che noi potremmo anche interpretare come segue: in casi come quello descritto in queste ultime righe, il docente ha sì la libertà di compiere una sua scelta personale; ma poi, una volta compiuta questa scelta, deve essere coerente: non può introdurre l'altezza di un triangolo come un segmento e poi affermare che «per trovare l'area di tale triangolo bisogna moltiplicare base (e qui ci sarebbe un discorso analogo, altrettanto lungo, da fare) per altezza», perché quel che si moltiplica tra loro devono essere numeri che esprimono misure di segmenti e non segmenti.
In Matematica, la coerenza è fondamentale; d'altra parte, la Matematica non è la scienza della verità, è la scienza della coerenza.

Risolvere una operazione.
Richiesta letta e sentita oralmente: «Risolvere la seguente operazione».
Si risolve un problema, un'equazione, non un'operazione. Un'operazione si effettua, si esegue, si fa.

Area di una figura piana e altro.
L'area di una figura piana è un numero, quello che esprime la misura della sua superficie. Ma molto spesso si sente utilizzare la parola "area" come sinonimo di superficie.
Si legge e si sente dire che «l'area di un rettangolo si trova "facendo" base per altezza» (spesso formalizzando: $b \times h$). Se base e altezza sono stati introdotti come numeri, cioè misure di segmenti opportunamente scelti, va anche bene. Ma se base e altezza sono segmenti, allora le cose non vanno bene, perché, come già detto poco sopra, si possono moltiplicare tra loro numeri, cioè misure in questo caso, e non segmenti. Moltiplicare tra loro segmenti non ha senso.
Lo stesso vale per la misura dell'area di un cerchio: si legge «l'area del cerchio si trova facendo raggio per raggio per π». Ma il raggio è un segmento, non una misura. (Restando in questo ambito, molti confondono circonferenza con cerchio: la prima è una linea, il secondo una superficie).
Anche per ciò che riguarda il perimetro, abbiamo più volte sentito dire e letto che: «il perimetro di un poligono si trova facendo lato più lato più lato …». Non ripetiamo quanto già fatto osservare sopra.

Rileviamo esplicitamente che le possibili cause degli errori degli studenti sono molteplici e imputabili alle più diverse motivazioni, non sempre facili da evidenziare e circostanziare.
Potrebbe apparire che tali cause siano ascrivibili a fatalità o a banale mancanza di comprensione, a distrazione, a ignoranza da parte dello studente, …, il che, certo!, a volte è vero. A monte di ciò si pongono solitamente molte e diverse accuse, ascrivibili allo studente. Qualche autore pone in evidenza anche le responsabilità dei docenti, ma su questo punto alcune posizioni sono troppo leggere e poco significative. Noi abbiamo sempre avuto la precisa sensazione che, indipendentemente dalla formazione professionale e specifica dei docenti, spesso di grado assai elevato e di indubbia qualità, e indipendentemente dalle modalità didattiche adottate, l'errore sia come ineliminabile, intrinseco, nella relazione molteplice che si rifà al cosiddetto "triangolo della didattica". Esiste e si manifesta in mille maniere, nonostante la correttezza, la precisione, la professionalità del docente. Dunque è parte del prodotto d'aula, spesso non ci sono indicatori prevedibili o cause specifiche (talvolta sì, ma spesso no). La posizione del docente sensibile, esperto, qualificato e capace si manifesta spesso proprio nella capacità di analisi delle cause e della qualità degli errori dei propri studenti.
In quanto ai possibili rimedi, più volte si auspica la necessità di una conoscenza sempre più sofisticata e professionale della Didattica della Matematica da parte dei docenti; non è solo un modo di dire vago e generico, è specifico; e i riferimenti a casi qui esposti in dettaglio di analisi di errori e di possibili

cause di questi, lo pone in evidenza. Il nostro continuo invito alla preparazione in Didattica della Matematica, dunque, non è generico, ma è assai specifico e reso concreto dagli esempi proposti e dai nostri commenti ai singoli casi.

Data la brevità del presente testo, ci limitiamo a queste poche pagine introduttive, rimandando, per esempi concreti, alla conferenza orale e al testo: D'Amore (2022).

Bibliografia

Asenova, M., & D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I., & Fúneme Mateus, C. C., & Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bologna: Bonomo.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7-61.

Bagni, G. T., & Negrini, P. (2000). Puntini … Considerazioni ed esperienze sul rigore formale nel passaggio tra la Scuole secondaria e l'Università. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, *21*(40), 69-91.

Becerra Galindo, H. M., & Font, V. (2019). Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos. *Revista Acta latinoamericana de matemática educativa [ALME], 32*(1), 531-540.

Becerra Galindo, H. M. (2020). Conciencia semiótica de los docentes de matemática en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. *Paradigma*, *XLI* (2), 381-403.

Becerra Galindo, H. M. (2021). Manifestazioni della coscienza semiotica degli insegnanti nell'insegnamento degli insiemi infiniti. In D'Amore, B. (Ed.) (2021). *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete*. *Atti del* Convegno *Incontri con la matematica* n. 35, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021. Pp. 175-176.

Becerra Galindo, H. M. (2022). Nuevos paradigmas en la post - pandemia en Educación matemática. *Memorias del III Simposio de Educación Matemática Virtual – II SEM V*, mayo 2022. Universidad de Luján.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Nuova edizione: 2023, Bologna: Bonomo].

D'Amore, B. (2022). Riflessioni su alcune problematiche relative al processo di insegnamento – apprendimento: dagli "errori" degli studenti alle convinzioni dei docenti. *Annali online della Didattica e della formazione docente*. Università di Ferrara, *14*(24), 6-25. https://annali.unife.it/adfd/issue/view/308

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2016). Proposte metodologiche illusorie nel processo di insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, *38*(73), 15-42.

Ramírez Bernal, H. A. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico.* (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá.

Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 203-216.

Ramírez Bernal, H. A. (2020). Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 87-105.

Keywords: error, teaching-learning process, student interpretation, specific language of mathematics.